ZUR ROLLE DER ALGORITHMIK IM MATHEMATIKUNTERRICHT DER HÖHEREN SCHULEN

von

S.K. Grosser, Wien

Die Ausführungen des Vortragenden beziehen sich auf den Einfluß, den die sehr starke Beziehung zwischen Mathematik und Informatik auf den Mathematikunterricht in schon naher Zukunft auszuüben imstande sein wird; sie sind also nicht als Beschreibung eines bereits eingetretenen Standes der Wechselwirkung zu interpretieren. Der Vortragende hat in den letzten Jahren in mehreren Einführungs- bzw. Fortbildungskursen, die er geleitet hat, sowie in einer 2-stündigen Vorlesung über das angesprochene Thema, die im kommenden Semester das vierte Mal stattfindet, Erfahrungen bezüglich der Bereitschaft von Lehramtsstudenten gesammelt, auf die hier angesprochene Thematik einzugehen. Aus diesen Tätigkeiten sind die Programmideen entstanden, die in [3] niedergelegt sind. Zum Zweck der Aufarbeitung der einschlägigen fachdidaktischen Probleme soll hier ein Beitrag geleistet werden, in dem die potentielle Verbesserung und zum Teil unausweichliche Veränderung des Mathematikunterricht skizziert wird, die aus dem Vordringen der Computermathematik[1] resultiert. Dabei ist selbstverständlich darauf hinzuweisen, daß der Computer im Klassenzimmer (bzw. im Laborraum) keineswegs mit einem nur etwas größer geratenen Taschenrechner vergleichbar ist; denn der wesentliche Unterschied liegt nicht in der Einsetzbarkeit bei der Bewältigung numerischer Probleme, sondern hauptsächlich in der Anwendbarkeit auf (repetitive) Algorithmen auf <u>allen</u> Gebieten der Mathematik, insbesondere auch dem der Algebra und der Geometrie.

§1. Algorithmen im Mathematikunterricht, gestern und heute

Die Beschäftigung mit Algorithmen ist auch im Mathematikunterricht keineswegs als neuartige Tätigkeit anzusehen. Vielmehr stellt der Algorithmus, wenngleich nicht immer unter dieser Bezeichnung geführt, eine uralte Organisationsform mathematischen Tuns und Denkens dar; was schon aus der seit langem gebräuchlichen Bezeichnung "euklidischer Algorithmus" geschlossen

----

1) Die in der einschlägigen Literatur in diesem Zusammenhang auch häufig verwendeten Bezeichnungen "Diskrete M", "Finite M", "Computeralgebra" u.a.m. sind nicht als Synonyme für diese Bezeichnungsweise anzusehen.

werden kann. In der Tat ist letzterer, auf Polynome angewandet, das wohl bekannteste Beispiel eines nicht-numerischen Algorithmus. Auf Algorithmen, allerdings solchen einfacher Art, beruhen aber auch die Grundrechnungsarten, das Wurzelziehen, die Berechnung von GGT und KGV von mehreren Zahlen, die Bruchrechnung, die Konstruktionsvorschriften der Geometrie, sowie alle Formeln der Planimetrie und der Stoichiometrie. Anderer Art sind die Algorithmen für die Methode von Newton (zum näherungsweisen Lösen von Polynomgleichungen), bzw. die Cardano-Formeln u.v.a.m. Als besonders markanter Algorithmus, der allerdings kaum je als solcher angesprochen wird, sei jener der traditionellen Kurvendiskussion erwähnt. In einer mathematisch vertretbaren Version könnte er in einfachen Fällen etwa so formuliert werden:

(1) Bestimme den Definitionsbereich der Zielfunktion
(2) Ermittle die Nullstellen der ersten Ableitung
(3) Bestimme Maxima bzw. Minima mit Hilfe der zweiten Ableitung oder aus anderen Überlegungen.
(4) Prüfe, ob die Werte am Ende des Definitionsintervalls, falls es endlich ist, (zulässige) Extrema darstellen.
(5) Ermittle (im einfachen Fall) die Wendepunkte aus der zweiten Ableitung
(6) Erstelle eine Graphik der Funktion unter Einbeziehung aller ermittelten Werte.

Der erfahrene Lehrer weiß, daß insbesondere die Schritte (3) und (4) oft nicht oder nur in unvollkommener Weise durchgeführt werden, wobei der Grund nicht nur darin zu sehen ist, daß das Einüben bzw. Einübenlassen mit zuwenig algorithmisierender Zielstrebigkeit erfolgt. Insofern als der zuletzt beschriebene Algorithmus höchstens eine Auflistung wichtiger Einzelschritte darstellt, die durchgeführt werden müssen, wird aus den bisher gegebenen Beispielen der zentrale Begriff unserer Diskussion - jener des Algorithmus - erst in vagen Umrissen sichtbar. In der Tat könnte man, zur Präzisierung angehalten, Algorithmen als "mathematische Produktionsrituale" oder "verfestigte Produktionsweisen" bezeichnen.

Es gibt ferner die Möglichkeit, bereits bekannte Berechnungsmethoden durch andere, gleichwertige zu ersetzen. So kann für die gewöhnliche Subtraktion (im Dezimalsystem) etwa auch die folgende Methode herangezogen werden, die an drei Beispielen ($Z_1 > Z_2$), ($Z_1 < Z_2$) und ($Z_1 = Z_2$) erläutert werden soll.

Mit A ist der traditionelle, mit B der für manche Zwecke (siehe z.B. das Programm ARIT-255 in [3]) günstigere Algorithmus bezeichnet; durch ihn wird die Subtraktion in $\mathbb{Z}$ auf die Addition und eine Komplementierung ($Z \mapsto Z'$) reduziert.

Beispiel 1 ($Z_1 > Z_2$)

	A		B
Z_1	3428	Z_1	3428
$-Z_2$	-2368	Z_2'	+7631
Z_1-Z_2	1060 ====	Z_1+Z_2'	11059
			1059
			1059
			1
		Z_1-Z_2	1060 ====

Beispiel 2 ($Z_1 < Z_2$)

	A		B
Z_1	4768	Z_1	4768
$-Z_2$	-16319	Z_2	+83680
Z_1-Z_2	-11551 ======	Z_1+Z_2'	88448
		$(Z_1+Z_2')=$	11551

Fazit:

$Z_1-Z_2=-(Z_1+Z_2')$ $\quad -(Z_1+Z_2')'=Z_1-Z_2 =$

- 11551
=====

Beispiel 3 ($Z_1 = Z_2$)

Z_1	3728	Z_1	3728
$-Z_2$	-3728	Z_2'	6271
Z_1-Z_2	0000 ====	Z_1+Z_2'	9999
		$(Z_1+Z_2')'$	0000

(Natürlich gestattet die Berechnung in 3 B die Zusammenfassung der Fälle $Z_1<Z_2$ und $Z_1=Z_2$ zu $Z_1<Z_2$) Es sei dem Leser überlassen, die Konstruktion von Z' aus Z zu erraten.

Fazit:

$Z_1-Z_2 = -(Z_1+Z_2')'$

Die Geschichte der Mathematik kennt darüber hinaus Dutzende von verschiedenen Algorithmen zur Ausführung der Grundrechnungsarten (siehe [5]).

Allen bisher gegebenen Beispielen gemeinsam ist das Schema von INPUT und OUTPUT, die Eindeutigkeit des Ergebnisses und die endliche Anzahl der Rechenschritte. Auf dieser Grundlage wird dem Leser die folgende etwas strengere Algorithmus-Definition zumindest plausibel erscheinen.

Ein Algorithmus ist eine in endlich vielen Schritten berechenbare Funktion auf einer (potentiell unendlichen) Menge von Eingabewerten mit Werten in einer (potentiell unendlichen) Menge von Ausgabewerten. Somit kann dieser zentrale Begriff des computergestützen Mathematikunterrichtes aus dem Funktionsbegriff heraus verstanden werden.[1)]

§ 2. Thesen zu den Chancen des computergestützen Mathematikunterrichtes

Es soll hier die These untermauert werden, daß das Vordringen der Computer-Mathematik die Gelegenheit bietet, Teile des Mathematikunterrichts neu zu beleben und denselben insgesamt wesentlich zu bereichern; ferner die These, daß es hier nicht auf die oberflächliche Kosmetik und modischen Aufputz, des Unterrichtsgeschehens hinausläuft, sondern auf eine potentiell tiefgreifende Veränderung, die nicht mit den fachdidaktischen Schwerpunktsetzungen der beiden letzten Jahrzehnte zu vergleichen ist.
Dazu sei ein Blick auf die hinter uns liegenden Entwicklungen geworfen. Nach dem Aufbau und der vorläufigen Vollendung großer mathematischer Theorien in der ersten Hälfte des Jahrhunderts - hier seien die Mengenlehre, die Topologie, die Funktionalanalysis, die moderne Algebra genannt - erhob man die massive Forderung, die alte "Beispielmathematik der Schule durch neue Lehrstoffe zu ergänzen bzw. zu ersetzen, der den Wissenschaftscharakter und Exaktheitsanspruch des Faches stärker betonen sollte. Es kann zum Eindringen der "Strukturmathematik", später der "Beweismathematik" und zur Ausprägung der wirklich schüler- lehrer- und elternfeindlichen Form des "Mengenlehreunterrichts".

Seit neuestem hallt es wider von Forderungen (der forensisch orientierten Wissenschaften) nach mehr beschreibender Statistik und Forderungen nach mehr Vermittlung von "ganzheitlichem" oder "systembezogenen Denken im Mathematikunterricht.

----

1) Es bedarf aber nicht des Hinweises, daß diese Erkenntnis kaum einen Kompetenzgewinn im Hinblick auf die Erstellung konkreter Algorithmen bringt und somit didaktisch weniger bedeutsam ist.

Es bedarf keiner prophetischen Gabe, auch diesen Forderungen wirkliche Relevanz und Zukunftsorientiertheit absprechen zu können, denn so wenig der akute Begründungszwang, unter dem die forschungsorientierte Universitätsmathematik steht in die Bildungsaufgabe des Mathematikunterrichts projiziert werden kann, so wenig kann das beim Systemisieren und beim Synthetisieren in größerem Umfang der Fall sein. So hat ja auch der Freistaat Bayern aus der Erkenntnis heraus, daß das gute Abschneiden seiner Mathematikabsolventen in der bildungspolitisch desorientierten Landschaft der Bundesrepublik Deutschland statistisch durchaus signifikant ist, bis heute - bei sonstiger Freiheit der Lehrmethode - im wesentlichen an einer stark modernisierten Form der "Beispielmathematik" festgehalten.

Lang ist hingegen die Liste der Verweigerungsrategien, mit denen sich Schüler und Eltern, zum Teil auch Lehrer, in Österreich der aufgezwungenen Beglückung zu entziehen versuchten, und unausweichlich waren die allseits bekannten negativen Folgen: ein stetes Schwinden der einfachen mathematischen "Fertigkeiten" einerseits, eine hartnäckige Nicht-Entwicklung gerade der mathematischen Fähigkeiten, deren Förderung das Ziel sein sollte, andererseits. Demgegenüber entwickelte sich neben viel Wertvollem, der elitäre Escapismus der Mathemtik-Olympiaden, der begabte Studierende oft unempfindlich macht für die Rezeption der bisher entwickelten großen Strukturtheorien.

Welche neuen Chancen bietet demgegenüber der computergestützte Mathematikunterricht? Wir gliedern die vorzubringenden Argumente in fachbezogene und schülerbezogene.

Fachbezogene Argumente

(1) Die Schulmathematik enthält eine Unzahl von kleinen und sehr viele größere Algorithmen.

(2) Im normalen Mathematikunterricht werden Algorithmen zu wenig ausführlich und zu wenig gründlich erfaßt bzw. nicht als solche gewürdigt.

(3) Durch den Einsatz vom programmierbaren Rechnern bzw. PC's kann der Mathematikunterricht entlastet und gleichzeitig vertieft werden.

(4) Der Mathematikunterricht wird durch das Erscheinen neuer Software und einschlägiger Literatur einer dauernden Beeinflussung in Richtung Algorithmisierung ausgesetzt, die gesteuert und didaktisch nutzbar gemacht werden kann.

(5) Der Einsatz von PC's kann fachübergreifende Aspekte des Mathematikunterrichtes stärken.

(6) Die systematische Verwendung von PC's im Mathematikunterricht verstärkt die Möglichkeiten der zusammenfassenden Darstellung von mathematischem Wissen und der geometrischen Repräsentation.

(7) Die Betonung der Algorithmik eignet sich in hervorragender Weise als durchgehendes Unterrichtsprinzip, insbesondere auch zum zusammenfassenden Wiederholen und im Projektunterricht.

Schülerbezogene Argumente

(8) Der Einsatz von PC's führt zu einer Horizonterweiterung beim Schüler im Hinblick auf Möglichkeiten der Numerik und der Algorithmik.

(9) Das Erstellen funktionsfähiger Algorithmen setzt ein genaues Eindringen in die Theorie voraus, so daß ein Abflachen des Gegensatzes zwischen Theorieverständnis und Rechenpraxis eintritt.

(10) Die Implementierung von Algorithmen auf PC's führt zu einer intensiven Auseinandersetzung mit einer beschränkten, aber unermüdbaren Gegenintelligenz.

(11) Das Erstellen von Algorithmen und die Fehlersuche testen die Belastbarkeit und erhöhen die Arbeitsgenauigkeit und Ausdauer.

(12) Es kommt zur Aktivierung eines zusätzlichen motorsensorischen Elements im Lernprozeß.

Es soll hier noch ein Beispiel mit starken Bezügen zu den Thesen (2),(3),(8) und (9) erläutert werden.

BEISPIEL 4 Über der Grundmenge $\mathbb{Q}$ sei die Gleichung

$\frac{2x+1}{3x-4} - \frac{x-4}{-x+7} = \frac{1}{2}$ aufzulösen.

Nicht im Definitionsbereich liegen $\frac{4}{3}$ und 7. Die übliche Auflösungsmethode führt auf eine quadratische Gleichung mit den Wurzeln $-\frac{2}{7}$ und 5, die beide in $\mathbb{Q}$ liegen.

Welche mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten würden bei dem Versuch angesprochen werden, den Lösungsmechanismus einer auf Programmierung zielenden Algorithmisierung zu unterwerfen?

Sie könnte etwa folgendermaßen aussehen.

1. Bestimme den GGT der die Nennerpolynome, d.h., GGT $\{3x-4, -x+7, 2\}$.
2. Ermittle das Polynom

   $p_1(x)$: 1. Zähler (links) * GGT / erster Nenner (links) +
   2. Zähler (links) * GGT / zweiter Nenner (links)

   $p_2(x)$: = Zähler (rechts) * GGT / Nenner (rechts)
3. Bilde $p(x) := p_1(x) - p_2(x)$.
4. Ermittle die Nullstellen von $p(x)$, falls vorhanden.
5. Bestimme die rationalen Nullstellen, falls vorhanden.

Um aus diesem Programmschema einen funktionierenden, allgemeinen gültigen Algorithmus für die Auflösung von Gleichungen der hier suggerierten Bauart zu machen, bedarf es natürlich der folgenden zusätzlichen Programmteile:

A. INPUT: Eingabe von (beliebig vielen) rationalen Funktionen (Zählerpolynom/Nennerpolynom) mit rationalen Koeffizienten

B. Ausführung der 4 Grundrechnungsoperationen in der Polynomalgebra $\mathbb{Q}[X]$

C. Bestimmung des GGT von beliebig vielen rationalen Polynomen.

D. Bestimmung der (rationalen) Nullstellen eines (rationalen) Polynoms.

E. OUTPUT: LÖSUNGSMENGE

Selbstverständlich steht in diesem Beispiel der für eine totale Algorithmisierung zu leistende Aufwand in keinem vernünftigen Verhältnis zum ursprünglichen Problem. Wenn man aber bedenkt, daß mit einer solchen Algorithmisierung dieser ganze Aufgabentyp ein für alle mal auflösbar wird, ermißt man besser die Tragweite des bevorstehenden Eindringens entsprechender Software in den Unterrichtsbereich (siehe z.B. die Programme POLYFUNK und GGT KGV-P in [3]).

§ 3. Algorithmisierungsmöglichkeiten in der Schulmathematik

In diesem Abschnitt soll hauptsächlich die These (1) durch konkrete Algorithmisierungsvorschläge erläutert werden. Eine große Anzahl elementarer Vorschläge dieser Art findet sich in dem Buch von A. Engel [1], das vom Standpunkt des algorithmisierenden Mathematikers aus die Elementarmathematik durchleuchtet, ohne allerdings (was im gewählten Kontext dabei gar nicht möglich wäre) auf die Situation des Mathematikunterrichtes irgenwie Rücksicht oder Bezug zu nehmen.
In solchen Mini-oder Kurzprogrammen kommen die Möglichkeiten eines computergestützten Mathematikunterrichtes erst teilweise zum Tragen; dazu bedarf es nach Meinung des Referenten der Erarbeitung von stark interaktiven Programmen mit Darstellungs- und Problemlösekompazität auf dem Gebiete der Algebra und der Geometrie, beide im weitesten Sinne begriffen. Mit anderen Worten ausgedrückt: durch jedes Programm, das im Mathematikunterricht erarbeitet oder verwendet wird, sollte die Lösungsstrategie für eine ganze Klasse von ähnlich gearteten Problemstellungen programmmäßig umgesetzt werden. Die Unterrichtszeit im Mathematikunterricht ist z.B. dann verschwendet, wenn in prononcierter Weise, einfache Formeln per Programm ausgewertet oder Pfeile über den Bildschirm "geschossen" werden. (Derartige Fingerübungen gehören in den frühen Informatikunterricht verlagert).
Es ist genau hier der geeignete Ort, auf die Tatsache hinzuweisen, daß die kommerziell erhältliche Software - von mächtigen Anwenderprogrammen wie M-MATH, SCRATCHPAD, MACSYMA, REDUCE etc. abgesehen, nicht jene rationale bzw. "erweiterte" rationale Arithmetik enthält, die der Mathematik der Schule - im Gegensatz zur Angewandten Mathematik etwa - ihren unverwechselbar traditionalistischen Charakter verleiht. So ist wohl jedem klar, daß die Formel

$$Fl = 6 \cdot \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{3a^2}{2}\sqrt{3}$$

für die Fläche des regelmäßigen 6-Ecks mit Seitenlänge a bedeutend mehr Information enthält als die "Formel"

$$Fl = 2.598076212\ a^2,$$

die im Grunde keine ist, weil die angedeutete reelle Zahl eben nur in schwächlicher Approximation vorliegt. Daß die $\sqrt{2}$ dem Quadrat, $\sqrt{3}$ dem gleichseitigen Dreieck, π dem Kreis zuzuordnen ist, dieses Wissen gehört ja schließlich zum Rüstzeug des Mathematikers bzw. zum allgemeinen Bildungsgut.

Diese geradezu unappetitliche Gleitkomma-Arithmetik der Rechner und daher der Bildschirme ist sicher ein Hemmschuh im Hinblick auf die erstrebte Akzeptanz der Geräte im Mathematik-Klassenzimmer. Die "Schuld" liegt, wenn man schon den Finger erheben will, weniger bei den Herstellern - die den großen Markt der Wirtschaft und Industrie im Auge und die Ingenieursteams in den Konstruktionsbureaus sitzen haben sondern wohl bei den Professoren selbst, bei den Mathematikern, die es bisher verabsäumt haben, ihre diesbezüglichen Wünsche zu formulieren und selbst konkrete Beiträge zu leisten, wohl weil die meisten die Tatsache zu wenig würdigen, daß mit dem Aufspüren oder Entdecken von Algorithmen der langwierige und durchaus kreative Prozeß ihrer Nutzbarmachung in der Schule und in der akademischen Lehre erst beginnt. Denn jeder Algorithmus ist in spezifische Zahlen- und Datenstrukturen eingebettet, die gleichzeitig, und in Interdependenz voneinander, ins Programmiergeschehen eingebettet werden müssen, ganz abgesehen von den besonderen Schwierigkeiten, die der Erarbeitung interaktiver und mathematisch flexibler Programme entgegenstehen.

Da der Referent auch in dieser kurzen Darstellung Konkretheit anstrebt, sollen im nächsten Paragraphen einige Programmvorschläge gemacht bzw. Programme und Programmpakete zitiert werden, die diesen Anforderungen entsprechen könnten bzw. entsprechen.

§ 4. ERFAHRUNGEN AUS EINER UNIVERSITÄTSVORLESUNG

Abschließend sollen Erfahrungen aus der Vorlesung "Schulmathematik VII (Informatik und Algorithmik im Mathematikunterricht)" skizziert werden, die der Referent seit dem Sommersemester 1986 dreimal gehalten hat.

Auf der Grundlage der in § 2 dargebotenen Thesen, die auch der Zielsetzung der Vorlesung zugrunde liegen, ergibt sich die Notwendigkeit, die Fähigkeiten von Studierenden im Lehramtstudium Mathematik hinsichtlich der beabsichtigten Umsetzung von neuen Unterrichtsinhalten zu aktivieren bzw. solche überhaupt erst zu schaffen. Obwohl BASIC - Kenntnisse und eine gewisse Vertrautheit mit Geräten nicht vorausgesetzt werden, sind sie bei den meisten Studierenden teilweise vorhanden hier hat sich in den Übungen (an IBM-kompatiblen Geräten) eine Trennung in zwei Gruppen als empfehlenswerte Maßnahme angeboten.

Da es sich in der Schulmathematik um eine Vielzahl von Algorithmen sehr unterschiedlichen Charakters und unterschiedlicher Komplexität handelt, ist es ein schwieriges Unterfangen, eine geeignete Aufgliederung zu finden, die mit dem Aufbau der Lehrinhalte des Mathematikunterrichtes nach Klassenniveaus kompatibel ist.

Daher wird bei der Aufteilung von Programmen zunächst eine rein formale Einteilung in drei Gruppen nach dem Schema:

. Miniprogramme . Kurzprogramme . Programme

vorgenommen, wobei das Unterscheidungsmerkmal jeweils aufsteigende Komplexität und daraus resultierende Programmlänge bzw. -Schwierigkeit ist.

. <u>Miniprogramme:</u> Programme zur Durchführung der stoichiometrischen Grundaufgaben in der Ebene und im Raum; allgemeiner: Programme, die auf direkte, unreflektierte Anwendung mathematischer Formeln hinauslaufen, sowie kurze Graphikprogramme zum geometrischen Zeichnen.

.<u>Kurzprogramme:</u> Programme, die Schleifen und Unterprogramme enthalten oder kompliziertere Eingabe und/oder Ausgabemodalitäten erfordern. Beispiele sind Programme zum Kurvenzeichnen, zum Lösen der Aufgaben der analytischen Geometrie, Programme (mit Graphik) zur Dreiecksgeometrie, Programme zum Ordnen bzw. Alphabetisieren.

. <u>Programme:</u> sie sollten ausnahmslos multifunktional und interaktiv konzipiert sein. Als Beispiele seien angeführt:

Kopfrechnen mit rationalen Zahlen

Matrizenalgebra (über)

Lineare Gleichungssysteme (über $\hat{Q}$ bzw. Z_p)

Rationale komplexe Arithmetik (mit Klammerrechnungen und Speicher)

Ordnen und Alphabetisieren

Sphärische Trigonometrie

Vektoralgebra

Normalverteilung

(u.v.a.m.)

Mit Graphik

Kongruenzabbildungen

Regelmäßige Polygone

Numerische Integration

Ähnlichkeitsabbildungen

Spiegelung am Einheitskreis

Euler'sche Gerade und Feuerbach'scher Kreis

(u.v.a.m.)

Jeder Studierende ist verpflichtet, ein Programm zu erarbeiten, zu dessen Dokumentation folgendes Schema einzuhalten ist:

(A) Genaue Formulierung der Aufgabe

(B) Herleitung bzw. Zitierung der notwendigen mathematischen Formeln bzw. Sätze bzw. Methoden (alles mit Literaturangabe)

(C) Tabelle der Umbenennungen nach dem Schema:

Text	a	b	c	α	β	γ	etc.
Programm	A	B	C	AL	BE	GA	

Flußdiagramm bzw. Struktogramm mit Angabe der Programmzeilen und unter Verwendung der gebräuchlichen Symbole.

(D) Listing des Programms

(E) 2 oder mehr Probeläufe

(F) Formulierung von mehreren Übungsbeispielen samt Lösungen

(G) Abgabe einer Diskette mit Programm

Das Programm soll auch für einen nicht mit der Materie unmittelbaren Vertrauten verständlich dokumentiert und leicht bedienbar sein. Eine Rücksprache mit dem Übungsleiter wird dringend empfohlen.

Programme bzw. Programmpakete, die diesen Anforderungen genügen, findet der Leser in [3](BASIC) bzw. auch in [4] (PASCAL).

L I T E R A T U R

[1] ENGEL, A.: Elementarmathematik vom algorithmischen Standpunkt, Studienbücher, Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1977

[2] Grosser, S.: Algorithmik und Informatik im Mathematikunterricht (Skriptum), Mathematisches Institut der Universität Wien, 1987

[3] Grosser, S. und Rupprecht, H.: BASIC- Mathematikprogramme, HPT, Wien, 1987

[4] Grosser, S.: PASCAL- Mathematikprogramme (in Vorbereitung)

[5] Kaiser, H. u. Nöbauer, W.: Geschichte der Mathematik für den Schulunterricht, HPT, Wien, 1984